

# Geometria Dużej Skali

Piotr W. Nowak

9 października 2013

## Spis treści

<b>1 Intuicje</b>	<b>1</b>
<b>2 Quasi-izometrie i zgrubne równoważności</b>	<b>2</b>
<b>3 Grupy jako obiekty geometryczne</b>	<b>4</b>
<b>4 Wymiar asymptotyczny</b>	<b>5</b>
<b>5 Średniowalność</b>	<b>9</b>
<b>6 Własność A</b>	<b>12</b>
<b>7 Zgrubne zanurzenia w przestrzenie Banacha</b>	<b>15</b>
<b>8 Ekspandery</b>	<b>17</b>
<b>9 Własność (T)</b>	<b>19</b>

## 1 Intuicje

Geometria dużej skali to sposób patrzenia na własności geometryczne, które są globalne. Na przykład, prosta rzeczywista i płaszczyzna różnią się nie tylko strukturą lokalną (wymiar topologiczny), ale także są istotnie różnymi przestrzeniami z globalnego punktu widzenia. Z drugiej strony prosta rzeczywista i jej podzbiór dyskretny  $\mathbb{Z}$ , złożony z liczb całkowitych z metryką odziedziczoną ze zbioru liczb rzeczywistych, mają pewne wspólne cechy geometryczne. Zadaniem geometrii dużej skali jest sformalizowanie tego typu ideologii.

Zacznijmy od przestrzeni  $\mathbb{Z}$ , wspomnianej powyżej. Załóżmy, że zaczynamy się oddalać od niej i patrzymy na nią z coraz odleglejszych punktów obserwacyjnych. Z powodu perspektywy, punkty przestrzeni  $\mathbb{Z}$  z daleka wyglądają jakby się do siebie zbliżały - tym są bliższe, im dalej się odsuniemy. Gdy odsuniemy się w nieskończoność, obserwowane punkty  $\mathbb{Z}$  zleją się w prostą rzeczywistą.

Wykonując podobny procedurę w przypadku przestrzeni metrycznej ograniczonej, patrząc z punktu obserwacyjnego w nieskończoności będziemy widzieć jedynie punkt.

Geometria dużej skali zajmuje się badaniem obiektów geometrycznych obserwowanych z nieskończoności. Przestrzenie metryczne są równoważne w tej geometrii, gdy obserwowane z nieskończoności są (metrycznie) równoważne. Tak więc w geometrii dużej skali,  $\mathbb{Z}$  jest tym samym co prosta  $\mathbb{R}$ , a każda przestrzeń metryczna zwarta jest równoważna z punktem. Celem wykładu będzie sformalizowanie tych intuicji i omówienie pewnych aspektów i niezmienników geometrii dużej skali przestrzeni metrycznych

## 2 Quasi-izometrie i zgrubne równoważności

Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną.

- (1)  $X$  jest dyskretna jeśli istnieje stała  $C > 0$  taka, że  $d(x, x') \geq C$  dla wszystkich  $x, x' \in X$ ,  $x \neq x'$ ;
- (2)  $X$  jest lokalnie skończona jeśli dla każdego  $x \in X$ , kula  $B(x, R)$  jest skończonym zbiorem;
- (3)  $X$  ma ograniczoną geometrię, jeśli dla każdego  $R \geq 0$  istnieje  $N_R \geq 0$  takie, że dla każdego  $x \in X$ , kula  $B(x, R)$  ma co najwyżej  $N_R$  elementów.

Niech  $D \geq 0$ . Mówimy, że  $N \subseteq X$  jest  $D$ -siecią, jeśli dla każdego  $x \in X$  istnieje  $x' \in N$  takie, że  $d(x, x') \leq D$ .  $N$  jest siecią w  $X$  jeśli jest  $D$ -siecią dla pewnego  $D \geq 0$ . (Dokładna wartość  $D$  zazwyczaj nie jest istotna).

**Przykład 1.** •  $\mathbb{Z}$  jest siecią w  $\mathbb{R}$ ;

- dowolny punkt jest siecią w przestrzeni metrycznej ograniczonej;
- $M$  - zamknięta rozmaitość. Orbita dowolnego punktu  $\pi_1(M)$  jest siecią w nakryciu uniwersalnym  $M$ .

**Definicja 2.** Niech  $X, Y$  przestrzenie metryczne.  $f : X \rightarrow Y$  jest

- (1) metrycznie właściwie jeśli przeciwobraz każdej kuli jest ograniczony;
- (2) zgrubnie Lipschitzowskie jeśli istnieją stałe  $L, C \geq 0$  takie, że

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x'),$$

oraz  $f$  jest metrycznie właściwie;

- (3) zgrubne jeśli istnieje niemalejąca funkcja  $\rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [\infty)$  taka, że

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, x')),$$

oraz  $f$  jest metrycznie właściwie.

Na przykład, przekształcenie przestrzeni ograniczonej w punkt spełnia wszystkie warunki, ale przekształcenie prostej w punkt nie jest metrycznie właściwe.

Następna definicja mówi które przekształcenia uznamy za równoważne.

**Definicja 3.** Dwa przekształcenia  $f, g : X \rightarrow Y$  są bliskie, jeśli istnieje stała  $C \geq 0$  taka, że  $d_Y(f(x), g(x)) \leq C$ .

**Definicja 4.** Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami metrycznymi. Przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  jest quasi-izometrią jeśli istnieją stałe  $L \geq 1, C \geq 0$ , takie że

$$\frac{1}{L}d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq Ld_X(x, x') + C,$$

dla wszystkich  $x, x' \in X$  oraz  $f(X)$  jest siecią w  $Y$ .

Gdy ostatni warunek nie jest spełniony, mówimy że  $f$  jest quasi-izometrycznym zanurzeniem  $X$  w  $Y$ .

Obiekty quasi-izometryczne to takie które są "takie same gdy patrzymy na nie z dużej odległości".

**Przykład 5.** (1) włożenie  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  jest quasi-izometrią;

(2) funkcja "podłogi"  $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest quasi-izometrią (nie jest ciągłą ani różnowartościową!);

(3) włożenie punktu w przestrzeń metryczną ograniczoną jest quasi-izometrią;

(4) przekształcenie przestrzeni ograniczonej w punkt jest quasi-izometrią;

(5) ogólniej: inkluzja dowolnej sieci w przestrzeń metryczną jest quasi-izometrią.

**Uwaga 6.** Quasi-izometria nie musi być ciągła, jeden do jednego ani "na"!

**Definicja 7.** Niech  $X, Y$  będą przestrzeniami metrycznymi. Przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  jest zgrubną równoważnością jeśli istnieją dwie niemalejące funkcje  $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , spełniające  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ , takie, że

$$\rho_-(d_X(x, x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, x')),$$

dla wszystkich  $x, x' \in X$ , oraz  $f(X)$  jest siecią w  $Y$ .

Gdy ostatni warunek nie jest spełniony mówimy, że  $f$  jest zgrubnym zanurzeniem  $X$  w  $Y$ .

**Lemat 8.** (1) Złożenie quasi-izometrii (quasi-izometrycznych zanurzeń) jest quasi-izometrią (quasi-izometrycznym zanurzeniem);

(2) złożenie zgrubnych równoważności (zgrubnych zanurzeń) jest zgrubną równoważnością (zgrubnym zanurzeniem).

**Lemat 9.** Przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  jest quasi-izometrią (zgrubną równoważnością) jeśli jest zgrubnie Lipschitzowskie (zgrubne) i istnieje zgrubnie Lipschitzowskie (zgrubne) przekształcenie  $g : Y \rightarrow X$  takie, że  $f \circ g$  jest bliskie  $\text{Id}_Y$  oraz  $g \circ f$  jest bliskie  $\text{Id}_X$ .

### 3 Grupy jako obiekty geometryczne

Niech  $G = \langle S | R \rangle$  będzie grupą skończenie generowaną:  $S$  jest skończonym zbiorem generatorów a  $R$  jest przeliczalnym zbiorem relacji.

**Przykład 10.** •  $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \dots, x_n | \emptyset \rangle$  to grupa wolna na  $n$  generatorach;

•  $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b | ab = ba \rangle$ .

Wyberzmy pewien skończony zbiór  $S$  generatorów. Wówczas możemy zdefiniować na  $G$  metrykę. Niech  $g \in G$ . Definiujemy długość  $G$  jako

$$|g|_S = \inf \left\{ \sum k_i : \gamma = s_{i_1}^{k_1} \cdots s_{i_m}^{k_m}, \text{ gdzie } s_j \in S \cup S^{-1} \right\}.$$

Czyli  $|g|_S$  to długość najkrótszego słowa w  $S$  reprezentującego  $g$ . Przy pomocy długości na grupie możemy zdefiniować metrykę:

$$d_S(g, h) = |g^{-1}h|_S.$$

**Uwaga 11.** O funkcji długości  $|\cdot|_S$  należy myśleć jak o "normie" na  $G$ , a o  $d_S$  jako o metryce indukowanej przez normę.

**Stwierdzenie 12.** *Metryka  $d_S$  jest lewo-niezmiennicza.*

*Dowód.* Mamy

$$d_S(\gamma g, \gamma h) = |(\gamma g)^{-1} \gamma h|_S = |g^{-1} \gamma^{-1} \gamma h|_S = |g^{-1} h|_S = d_S(g, h).$$

□

**Uwaga 13.** (1) Definiując  $d_S(g, h) = |gh^{-1}|$  otrzymamy metrykę prawo-niezmienniczą;

(2) Mając daną metrykę  $d_S$  możemy "odzyskać" funkcję długości:  $|g|_S = d_S(g, e)$ .

**Lemat 14.** *Skończenie generowana grupa z metryką  $d_S$  jest dyskretną przestrzenią metryczną o ograniczonej geometrii.*

Metryki na grupie pozwalają badać je metodami geometrii dużej skali. Metryka  $d_S$  zdefiniowana powyżej zależy od wyboru zbioru  $S$ . Tym niemniej, z punktu widzenia geometrii dużej skali, takie zmiany nie mają znaczenia.

**Stwierdzenie 15.** *Niech  $G$  będzie skończenie generowaną grupą i niech  $S, T$  będą dwoma skończonymi zbiorami generatorów grupy  $G$ . Wówczas przestrzenie metryczne  $(G, d_S)$  i  $(G, d_T)$  są quasi-izometryczne.*

*Dowód.* Niech  $g \in G$  będzie dane poprzez najkrótsze słowo w  $S$ :

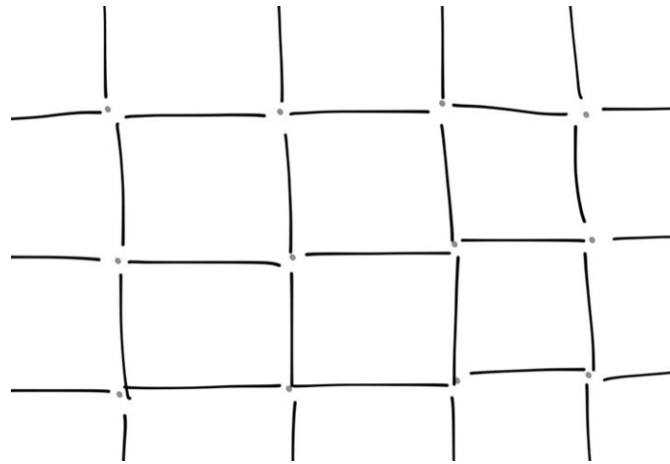
$$g = \prod \sigma_i, \quad \sigma_i \in S \cup S^{-1}.$$

Zapiszmy każdy generator  $s \in S$  jako słowo o najkrótszej możliwej długości w  $T$ . To pozwala oszacować długość  $g$  jako słowa w  $T$ . Podobnie robimy zamieniając  $S$  i  $T$ . Zatem identyczność na  $G$  jest szukaną quasi-izometrią.  $\square$

Istotnym pojęciem jest graf Cayley'a. Mając dany ustalony skończony zbiór generatorów grupy  $G$  definiujemy graf  $\text{Cay}(G, S)$  w następujący sposób:

- zbiór wierzchołków  $V = G$ ;
- wierzchołki  $g, h \in G$  są połączone krawędzią, jeśli  $g^{-1}h \in S$ .

Wówczas metryka długości słowa  $d_S$  na  $G$  jest tym samym co metryka najkrótszej ścieżki na zbiorze wierzchołków grafu  $\text{Cay}(G, S)$ .



Rysunek 1: Graf Cayley'a grupy  $\mathbb{Z}^2$  ze zbiorem generatorów  $(1,0)$  i  $(0,1)$

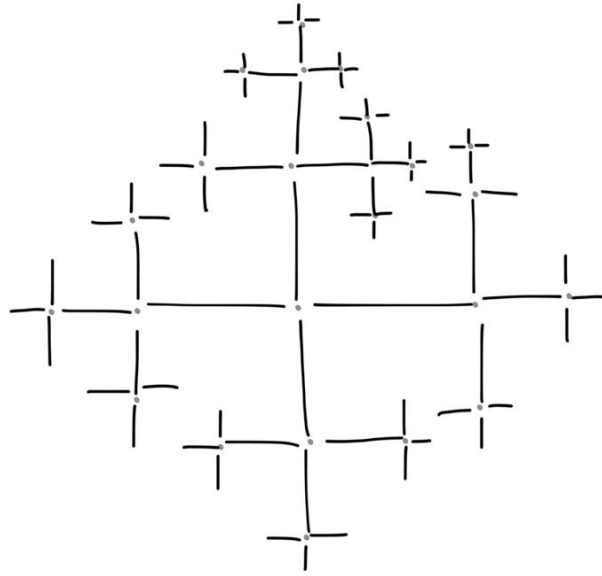
Geometria dużej skali jest ważnym kierunkiem badania rozmaitości zwartych. Pozawala na to następujący fakt.

**Twierdzenie 16** (Lemat Milnora-Schwartz). *Niech  $M$  rozmaitość zwarta z metryką geodezyjną. Wówczas grupa podstawowa  $\pi_1(M)$  z metryką długości słowa jest quasi-izometryczna z nakryciem podstawowym  $\tilde{M}$  z metryką podniesioną z  $M$ .*

## 4 Wymiar asymptotyczny

Wymiar asymptotyczny jest jednym z najbardziej naturalnych niezmienników w geometrii dużej skali. Jest on asymptotyczną wersją wymiaru pokryciowego znanego z topologii.

Niech  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  pokrycie przestrzeni metrycznej  $X$  (nie zakładamy żadnych topologicznych własności zbiorów  $U_i$ ).



Rysunek 2: Graf Cayley'a grupy wolnej na dwóch (wolnych) generatorach

- (1)  $\mathcal{U}$  jest jednostajnie ograniczone jeśli  $\sup_i \text{diam } U_i < \infty$ ;
- (2) dla  $R \geq 0$ ,  $R$ -krotność pokrycia  $\mathcal{U}$  to najmniejsza taka liczba  $n \in \mathbb{N}$ , że dla każdego  $x \in X$ , kula  $B(x, R)$  przecina co najwyżej  $n$  zbiorów  $U_i$ .

**Definicja 17** (Gromov, 1993). *Mówimy, że przestrzeń metryczna  $X$  ma wymiar asymptotyczny co najwyżej  $n$ , jeśli dla każdego  $R \geq 0$  istnieje jednostajnie ograniczone pokrycie  $\mathcal{U}$  przestrzeni  $X$  o  $R$ -krotności co najwyżej  $n + 1$ . Oznaczamy to przez  $\text{asdim } X \leq n$ .*

*Wymiar asymptotyczny  $X$  to  $\min \{k \in \mathbb{N} : \text{asdim } X \leq k\}$ .*

**Przykład 18.** Wymiar asymptotyczny dowolnej przestrzeni metrycznej ograniczonej spełnia  $\text{asdim } X = 0$ . Istotnie, wystarczy dla dowolnego  $R > 0$  pokryć  $X$  jednym zbiorem:  $X$ .

**Przykład 19.**  $\text{asdim } \mathbb{R} = 1$ . Mając dane  $R > 0$  pokryjmy  $\mathbb{R}$  rodziną kul  $\{B(2nR, R)\}$ . Jest to pokrycie jednostajnie ograniczone, którego  $R$ -krotność wynosi 2. Zatem dostajemy oszacowanie  $\text{asdim } \mathbb{Z} \leq 1$ . Fakt, że  $\text{asdim } \mathbb{R} \geq 1$  zostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

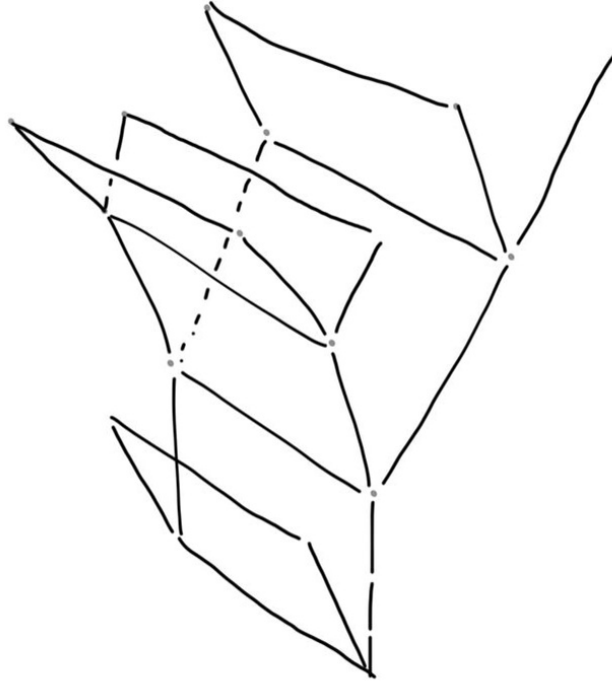
**Przykład 20.**  $\text{asdim } \mathbb{R}^2 \leq 2$ .

Wystarczy rozważyć pokrycie  $\mathbb{Z}^2$  "cegłami" jak na poniższym rysunku, przeskalowane liniowo aby zbiory były odpowiednio duże.

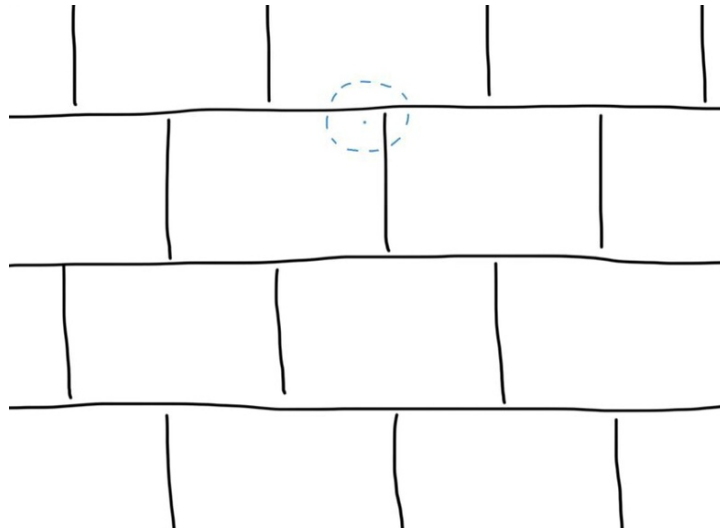
Wymiar asymptotyczny jest niezmiennikiem w geometrii dużej skali.

**Twierdzenie 21** (Gromov). *Niech  $X$  i  $Y$  będą zgrubnie równoważnymi przestrzeniami metrycznymi. Wówczas*

$$\text{asdim } X = \text{asdim } Y.$$



Rysunek 3: Graf Cayley’a rozwiązalnej grupy Baumslaga-Solitara  $BS(1,2) = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = b \rangle$ . Geometrycznym ciągłym modelem jest iloczyn kartezjański  $T \times \mathbb{R}$ , gdzie  $T$  jest nieskończonym drzewem binarnym, przy czym metryka na kopii  $\mathbb{R}$  jest rozciągana w zależności od współrzędnej w  $T$  (tzw. “warped product”). Innymi słowy, “pionowe” płaszczyzny mają geometrię płaszczyzny hiperbolicznej  $\mathbb{H}^2$  i są posklejane ze sobą wzdłuż drzewa  $T$ .



Rysunek 4:  $\text{asdim } \mathbb{Z}^2 \leq 2$

*Dowód.* Mając dane  $R > 0$ , bierzemy jednostajnie ograniczone pokrycie  $\mathcal{U}$  o  $S$ -krotności  $\leq \text{asdim} Y + 1$  przestrzeni  $Y$  i zgrubną równoważność  $f : X \rightarrow Y$  definiujemy pokrycie  $X$ ,

$$V_i = f^{-1}(U_i),$$

$U_i \in \mathcal{U}$ . Dobierając  $S$  do danego  $R$  otrzymujemy pokrycie  $\mathcal{V} = \{V_i\}$  spełniające żądane warunki. □

**Twierdzenie 22.** *Niech  $T$  będzie lokalnie skończonym drzewem. Wówczas  $\text{asdim} T = 1$ .*

*Dowód.* Wybierzmy wierzchołek  $p \in T$  i dla  $R > 0$  zdefiniujmy

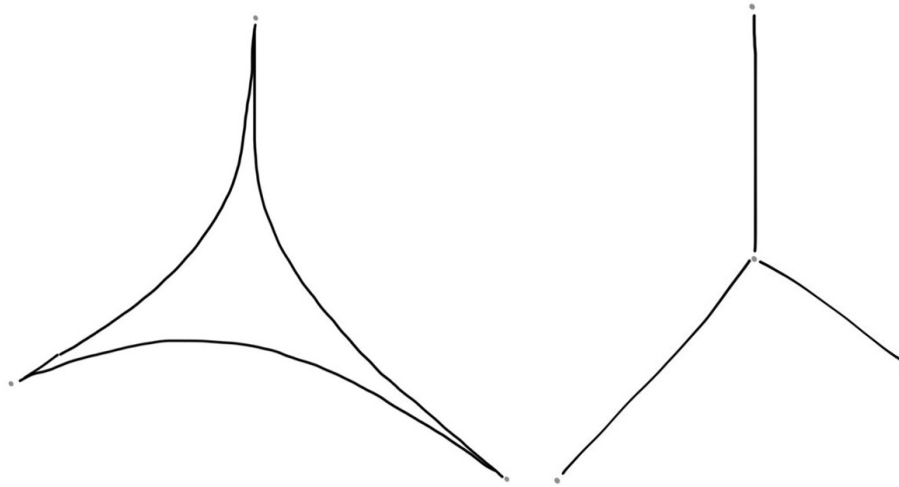
$$A_n = \{x \in T : nR \leq d(p, x) \leq (n + 1)R\}.$$

Pokrycie  $T$  zbiorami  $A_n$  ma  $R$ -krotność 2, ale nie jest jednostajnie ograniczone. Aby otrzymać pokrycie jednostajnie ograniczone wprowadzamy podpodział zbiorów  $A_n$  na mniejsze podzbiory o wspólnie ograniczonej średnicy. Korzystając z geometrycznych własności drzewa można to zrobić nie zmieniając  $R$ -krotności. □

**Wniosek 23.** *Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{asdim} \mathbb{F}_n = 1$ .*

Trójkąt geodezyjny jest  $\delta$ -cienki jeśli suma  $\delta$ -otoczeń jego dwóch boków zawiera trzeci bok.

**Definicja 24 (Gromov).** *Grupa jest  $\delta$ -hiperboliczna jeśli każdy trójkąt geodezyjny w grafie Cayley'a jest  $\delta$ -cienki.*



Rysunek 5:  $\delta$ -cienki trójkąt oraz 0-cienki trójkąt w drzewie

Na płaszczyźnie Euklidesowej łatwo znaleźć trójkąty, które nie są  $\delta$ -cienkie dla ustalonego  $\delta$ . W drzewie dowolny trójkąt geodezyjny jest "trójnogiem", czyli jest 0-cienki. Zatem drzewa są 0-hiperboliczne.

**Wniosek 25.** Grupa wolna  $\mathbb{F}_n$ ,  $n \geq 2$ , jest hiperboliczna.

Grupy hiperboliczne są jednym z podstawowych obiektów badań w geometrycznej teorii grup. Klasyczny przykład (tzw. "klasyczne grupy hiperboliczne") to grupy podstawowe zwartych rozmaitości hiperbolicznych.

Ogólniej mamy następujący wynik.

**Twierdzenie 26** (Gromov, 1993). *Niech  $G$  będzie grupą hiperboliczną. Wówczas  $\text{asdim} G < \infty$ .*

Jeszcze jedna klasyczna klasa grup ma skończony wymiar asymptotyczny.

**Twierdzenie 27** (Dranishnikov-Januszkiewicz, 1999). *Grupy Coxetera mają skończony wymiar asymptotyczny.*

Niedawny wynik dotyczy mapping class grup powierzchni. Mapping class grupa powierzchni  $S$  to grupa homeomorfizmów  $S$ , modulo relacja izotopii.

**Twierdzenie 28** (Bestvina, Bromberg, Fujiwara, 2011). *Mapping class grupy mają skończony wymiar asymptotyczny.*

Na koniec podamy przykłady grup skończenie generowanych o nieskończonym wymiarze asymptotycznym. Niech  $G$  będzie jedną z grup:

- produkt wiankowy  $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ ;
- grupa Thompsona  $F$ ;
- grupa Grigorchuka.

Każda z powyższych grup spełnia  $\text{asdim} G = \infty$ . Dla  $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$  i grupy Thompsona mamy, że  $\mathbb{Z}^n$  jest podgrupą dla dowolnego  $n$ . Zatem  $\text{asdim} G \geq \text{asdim} \mathbb{Z}^n \geq n$  dla każdego  $n$ . Grupa Grigorchuka jest torsyjna, ale ma własność, że  $G \times G$  jest podgrupą w  $G$ . Z tego można wyprowadzić, że  $\mathbb{Z}^n$  zanurza się zgrubnie w  $G$  dla każdego  $n$  i reszta argumentu jest podobna.

## 5 Średniowalność

Niech  $X$  przestrzeń metryczna dyskretna. Dla  $R > 0$  podzbioru  $A \subseteq X$  definiujemy  $R$ -brzeg zbioru  $A$  jako

$$\partial_R A = \{x \in X \setminus A : d(x, A) \leq R\}.$$

Dla  $R = 1$  stosujemy oznaczenie  $\partial A$ .

**Definicja 29.** *Grupa skończenie generowana  $G$  jest średniowalna jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje zbiór skończony  $A$ , taki, że*

$$\frac{\#\partial A}{\#A} \leq \varepsilon.$$

Powyższa definicja nie jest historycznie pierwszą definicją średniowalności, a raczej geometryczną charakteryzacją. Używamy jej właśnie ze względu na geometryczny aspekt. Oryginalna definicja von Neumanna, w terminach średnich niezmienniczych, jest przytoczona pod koniec tej sekcji.

**Przykład 30.** (1)  $\mathbb{Z}$  jest średniowalna: dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  wystarczy dobrać odpowiednio dużą kulę;

(2) podobnie w  $\mathbb{Z}^n$

(3) grupa wolna  $\mathbb{F}_2$  nie jest średniowalna

**Stwierdzenie 31.** Niech  $H$  - podgrupa skończenie generowana w skończenie generowanej grupie  $G$ . Jeśli  $G$  jest średniowalna, to  $H$  jest średniowalna.

*Dowód.* Wybieramy skończone zbiory generatorów  $S_G$  i  $S_H$  takie, że  $S_H \subseteq S_G$ . Mając dany zbiór  $A$  dla  $\varepsilon > 0$  spełniający warunki definicji dla  $G$ , bierzemy podzbiory  $A_i = A \cap H_i$ , gdzie  $H_i$  są warstwami podgrupy  $H$ . Można pokazać, że

$$\varepsilon \geq \frac{\#\partial_G A}{\#A} \geq \sum_i \frac{\#\partial_H A_i}{\#A_i} \frac{\#A_i}{\#A},$$

gdzie  $\partial_H A_i$  oznacza brzeg w  $H$ . Ponieważ jest to kombinacja wypukła, musi istnieć indeks  $i$  dla którego

$$\frac{\#\partial_H A_i}{\#A_i} \leq \varepsilon.$$

□

**Stwierdzenie 32.** Niech  $G$  i  $H$  skończenie generowane grupy, które są quasi-izometryczne. Jeśli  $G$  jest średniowalna to  $H$  też jest średniowalna.

Dowód sprowadza się do "przeciągnięcia" zbiorów  $A$  z definicji średniowalności z  $G$  to  $H$  poprzez daną quasi-isometrię.

**Stwierdzenie 33** (Følner, 1958). (Warunek Følnera) Niech  $G$  grupa generowana przez skończony zbiór  $S$ .  $G$  jest średniowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje skończony podzbiór  $F \subseteq G$ , spełniający

$$\frac{\#(F \triangle F_s)}{\#F} \leq \varepsilon,$$

dla każdego  $s \in S$ .

*Dowód.* Dowód wynika z prostych oszacowań i fakcie, że

$$\partial A = \bigcup_{s \in S} A_s \setminus A.$$

□

Zbiory  $F$  w powyższym stwierdzeniu nazywamy zbiorami Følnera, lub ciągiem zbiorów Følnera, gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Istnieje również wersja prawo-stronna.

**Stwierdzenie 34.** Niech  $G$  grupa generowana przez skończony zbiór  $S$ .  $G$  jest średniowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje skończony podzbiór  $F \subseteq G$ , spełniający

$$\frac{\#(F \Delta sF)}{\#F} \leq \varepsilon,$$

dla każdego  $s \in S$ .

*Dowód.* Wykorzystujemy inwersję w grupie:  $\varphi(g) = g^{-1}$ . Mając dany lewo-stronny ciąg zbiorów Følnera  $F_n$ , zbiory  $\varphi(F_n)$  tworzą prawo-stronny ciąg Følnera.  $\square$

**Stwierdzenie 35** (Hulanicki, Reiter). (Warunek Hulanickiego-Reitera)  $G$  jak wcześniej.  $G$  jest średniowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje funkcja  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  o następujących własnościach:

- (1)  $f$  ma skończony nośnik;
- (2)  $f \geq 0$  oraz  $\sum_{g \in G} f(g) = 1$ ;
- (3)  $\|f - s \cdot f\|_1 \leq \varepsilon$ , gdzie norma  $\|\eta\|_1 = \sum_{x \in G} |\eta(x)|$ .

Niech  $X$  będzie zbiorem przeliczalnym. Przestrzeń  $\ell_\infty(X)$  definiujemy jako przestrzeń funkcji ograniczonych  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , czyli spełniających

$$\sup_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

Jest to przestrzeń liniowa, a z normą

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

jest przestrzenią Banacha.

Niech  $G$  będzie grupą. Średnią na grupie nazywamy liniowy funkcjonal ciągły  $m$  na przestrzeni  $\ell_\infty(G)$ , spełniający warunki

- (1)  $m(f) \geq 0$  jeśli  $f \geq 0$ ;
- (2)  $m(1_X) = 1$ ;

Jeśli dodatkowo

$$m(g \cdot f) = m(f),$$

gdzie  $g \cdot f(x) = f(g^{-1}x)$ , wówczas  $m$  nazywamy średnią (lewo-)  $G$ -niezmienniczą, albo po prostu (lewo-) niezmienniczą.

**Twierdzenie 36** (von Neumann, 1929).  $G$  jest średniowalna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje średnia niezmiennicza na  $G$ .

*Szkic dowodu.* Mając dany ciąg Følner  $F_n$  definiujemy  $f_n = \frac{1_{F_n}}{\#F_n}$ , otrzymujemy miary probabilistyczne na  $G$  o skończonych nośnikach. Są one w szczególności elementami  $\ell_1(G)$ . W  $\ell_\infty(G)^* = \ell_1(G)^{**}$  bierzemy granice zbieżnej podsekcji  $\widehat{f_{n_\alpha}}$  w słabej- $*$  topologii. Taka zbieżna podsekcja istnieje z twierdzenia Banacha-Alaoglu. Ta granica jest średnią niezmienniczą.

W drugą stronę korzystamy z twierdzenia Goldsteina wynika słaba- $*$  gęstość kuli jednostkowej  $\ell_1(G)$  w kuli jednostkowej  $\ell_1(G)^{**}$  i ze średniej otrzymujemy sieć elementów  $f_n$  sfery jednostkowej w  $\ell_1(G)$ , taki że  $f_n - sf_n$  zbiega słabo do 0 dla każdego generatora  $s$ . Korzystając z lematu Mazura możemy poprawić zbieżność do normowej.  $\square$

**Wniosek 37.**  $\mathbb{F}_2$  nie jest średniowalna.

*Dowód.* Załóżmy przeciwnie i niech  $m$  będzie średnią niezmienniczą. Weźmy zbiór  $A \subset \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$  tych słów zredukowanych, które zaczynają się od nietrywialnej potęgi  $a$ . Wówczas

$$A \cup aA = \mathbb{F}_2,$$

więc  $m(1_A) \geq \frac{1}{2}$ . Ale zbiory  $A, bA, b^2A, \dots$  są rozłączne, więc korzystając z niezmienniczości,

$$1 = m(\mathbb{F}_2) \geq m(A) + m(bA) + m(b^2A) = 3m(A) \geq \frac{3}{2}.$$

$\square$

## 6 Własność A

**Definicja 38** (Yu, 1998). Niech  $X$  przestrzeń metryczna dyskretna.  $X$  ma własność A jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  i  $R > 0$  istnieje rodzina skończonych zbiorów  $\{A_x\}_{x \in X}$ ,  $A_x \subset X \times \mathbb{N}$ , spełniających następujące warunki:

1.  $\frac{\#(A_x \Delta A_y)}{\#(A_x \cap A_y)} \leq \varepsilon$  jeśli  $d(x, y) \leq R$ ;
2.  $A_x \subseteq B(x, S) \times \mathbb{N}$ , gdzie  $S > 0$  zależy od  $\varepsilon$  i  $R$ , ale nie od  $x$ .

**Przykład 39.** Niech  $G$  - grupa średniowalna. Wówczas  $G$  ma własność A. Istotnie, mając dany lewo-stronny zbiór Følnera  $F$  dla danego  $\varepsilon > 0$  zdefiniujemy  $A_g = Fg \times \{1\} \subseteq G \times \mathbb{N}$ . Wówczas rodzina  $\{A_g\}$  spełnia warunki definicji własności A.

**Przykład 40.** Drzewo  $T$  ma własność A. Ustalmy jeden wierzchołek oraz nieskończony geodezyjny promień  $\gamma$  w  $T$ . Dla każdego wierzchołka  $x$  w  $T$  istnieje dokładnie jeden promień geodezyjny  $\gamma_x$ , mający nieskończone przecięcie z  $\gamma$ . Dla  $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , zdefiniujemy  $A_x$  jako segment geodezyjny o początku w  $x$  i długości  $n$ , zawarty w  $\gamma_x$ . Ta rodzina zbiorów  $\{A_x\}$  spełnia warunki własności A dla danego  $\varepsilon > 0$ .





**Wniosek 46.** *Istnieje rodzina podgrup normalnych  $N_i$  skończonego indeksu grupy wolnej  $\mathbb{F}_2$  o trywialnym przecięciu, taka, że  $X = \coprod \mathbb{F}_2/N_i$  nie ma własności A.*

Powyższe przykłady mają ograniczoną geometrię.

Druga klasa przykładów wykorzystuje wysoko-wymiarowe produkty kartezjańskie. Mając daną grupę skończoną  $G$  o zbiorze generatorów  $S$  poprzez  $G^n$  rozumiemy produkt kartezjański  $n$  kopii  $G$ , generowany przez zbiór  $S \times \{e\} \times \cdots \times \{e\} \cup \{e\} \times S \times \{e\} \times \cdots \times \{e\} \cup \cdots \cup \{e\} \times \cdots \times \{e\} \times S$ .

**Twierdzenie 47** (Nowak, 2007). *Niech  $G$  skończona grupa o przynajmniej dwóch elementach. Wówczas suma rozłączna  $\coprod_n G^n$  nie ma własności A.*

W przypadku gdy  $G = \mathbb{Z}_2$  powyższy przykład to suma kostek dyskretnych coraz większych wymiarów, z tzw. metryką Hamminga. Ta rodzina kostek jest niezależnie użyteczna w geometrii metrycznej przestrzeni Banacha.

## 7 Zgrubne zanurzenia w przestrzenie Banacha

Istotnym pytaniem jest, które przestrzenie metryczne i grupy możemy zanurzyć zgrubnie w przestrzeń Hilberta. Powodem jest następujące

**Twierdzenie 48** (Yu, 1998). *Niech  $G$  skończenie generowana grupa. Jeśli  $G$  zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta to hipoteza Novikova jest prawdziwa dla wszystkich rozmaitości zamkniętych  $M$  takich, że  $\pi_1(M) = G$ .*

Hipoteza Novikova to jeden z większych otwartych problemów w topologii rozmaitości. Mówi ona o tym że wyższe sygnatury są niezmiennikami typu homotopijnego rozmaitości. Wyższe sygnatury to liczby przypisane rozmaitości, otrzymane poprzez ewaluację pewnych wyrażeń w klasach charakterystycznych rozmaitości, na klasie orientacji.

**Twierdzenie 49.** *Niech  $X$  przestrzeń metryczna o ograniczonej geometrii. Jeśli  $X$  ma własność A to  $X$  zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta.*

*Dowód.* Mając dany ciąg rodzin zbiorów  $A_x^n$ , dla  $\varepsilon$  spełniających  $\sum \varepsilon_n^2 < \infty$  konstruujemy

$$\xi_x^n = \frac{1_{A_x^n}}{\sqrt{\#A_x^n}} \in \ell_2(X \times \mathbb{N}).$$

Następnie definiujemy przekształcenie  $F : X \rightarrow \bigoplus \ell_2(X \times \mathbb{N})$  wzorem

$$F(x) = \bigoplus \xi_x - \xi_p,$$

gdzie  $p$  jest ustalonym punktem. Tak zdefiniowane  $F$  jest zanurzeniem zgrubnym  $X$  w  $H = \ell_2(X \times \mathbb{N})$ .  $\square$

**Wniosek 50.** *Jeśli  $X$  ma skończony wymiar asymptotyczny to  $X$  zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta.*

Zatem otrzymujemy listę grup dla których hipoteza Novikova jest wnioskiem z geometrycznych własności grupy:

- średniowalne,
- hiperboliczne,
- liniowe
- mapping class grupy

Istotnym pytaniem było czy zgrubna zanurzalność w przestrzeń Hilberta jest równoważna własności A.

**Twierdzenie 51** (Nowak). *Niech  $X = \coprod G^n$  będzie przestrzenią z twierdzenia 47. Wówczas  $X$  nie ma własności A ale zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta.*

W przypadku zanurzeń w przestrzeń Hilberta również nie istnieje wiele przykładów przestrzeni, które nie zanurzają się w nią zgrubnie. Pierwszy taki przykład został znaleziony przez Gonga, Dranishnikova, Lafforgue'a i Yu, wykorzystując pewną konstrukcję Enflo. Na podstawie ich przykładu Gromov zaobserwował, że ważnym przykładem są ekspandery, omówione bardziej szczegółowo w następnej sekcji.

**Twierdzenie 52** (Gromov). *Ciąg ekspanderów nie zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta.*

Interesujące są również zanurzenia w inne przestrzenie Banacha, np. przestrzenie  $\ell_p$  lub, ogólniej, jednostajnie wypukłe przestrzenie Banacha. Dla niektórych przestrzeni Banacha zanurzenie zgrubne zawsze istnieje.

**Przykład 53.** Każda dyskretna przestrzeń metryczna zanurza się w przestrzeń  $\ell_\infty$  (tzw. zanurzenie Kuratowskiego).

**Twierdzenie 54** (Aharoni, 1974). *Dowolna ośrodkowa przestrzeń metryczna zanurza się bi-Lipschitzowsko w  $c_0$  (a więc również zgrubnie).*

**Twierdzenie 55** (Brown-Guentner, 2003). *Dowolna przestrzeń metryczna o ograniczonej geometrii zanurza się zgrubnie w pewną refleksywną przestrzeń Banacha, np. w  $(\bigoplus_{p=2,3,\dots} \ell_p)_{(2)}$ .*

Żadna z powyższych przestrzeni nie jest jednostajnie wypukła. Przestrzeń Banacha  $E$  jest jednostajnie wypukła, jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  taka, że  $\|x - y\| \geq \varepsilon$  implikuje

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Przykładami jednostajnie wypukłych przestrzeni Banacha są  $L_p(\mu)$  dla dowolnej miary i  $1 < p < \infty$ . Przestrzenie  $c_0$ ,  $\ell_1$  i  $\ell_\infty$  nie są jednostajnie wypukłe, co jest widoczne nawet w dwóch wymiarach.

**Przykład 56.** Płaszczyzna  $\mathbb{R}^2$  z normą  $\ell_1$  (miejską) nie jest jednostajnie wypukła, ale posiada równoważną normę jednostajnie wypukłą, normę euklidesową.

Zatem jednostajna wypukłość przestrzeni Banacha jest własnością izometryczną a nie izomorficzną. Przestrzeń Banacha, która posiada równoważną normę jednostajnie wypukłą nazywa się superrefleksywną.

Ze wszystkich przestrzeni  $\ell_p$ , w przestrzeń Hilberta najtrudniej jest zanurzyć zgrubnie.

**Twierdzenie 57** (Nowak, 2005). *Niech  $X$  przestrzeń metryczna, która zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta. Wówczas  $X$  zanurza się zgrubnie w przestrzeń  $\ell_p$  dla każdego  $1 \leq p \leq \infty$ .*

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się przekształcenie Mazura, pomiędzy sferami jednostkowymi przestrzeni  $L_p$ . Przekształcenie to definiujemy jako  $M_{p,q} : S(L_p(\mu)) \rightarrow S(L_q(\mu))$ ,

$$M_{p,q}f(x) = |f(x)|^{\frac{p}{q}} \text{sign}(f(x)).$$

Ma ono tę własność, że  $M_{p,q}$  jest, dla dowolnych  $1 \leq p, q < \infty$ , jednostajnie ciągłym homeomorfizmem sfer  $L_p$  i  $L_q$  o jednostajnie ciągłej odwrotności. (Zauważmy, że  $M_{p,q}^{-1} = M_{q,p}$ ).

Ciekawą własnością zanurzeń zgrubnych jest również to, że wyznaczone są one na skończonych podzbiorach.

**Twierdzenie 58** (Ostrowski). *Przestrzeń metryczna  $X$  zanurza się zgrubnie w przestrzeń Banacha  $E$  wtedy i tylko wtedy gdy istnieją funkcje  $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  takie, że dla każdego skończonego podzbioru  $F \subseteq X$  istnieje przekształcenie  $\varphi_F : F \rightarrow X$  takie, że*

$$\rho_-(d(x, y)) \leq \|\varphi_F(x) - \varphi_F(y)\| \leq \rho_+(d(x, y)).$$

## 8 Ekspandery

Ekspandery to skończone grafy o bardzo ciekawych własnościach. Są obecnie bardzo intensywnie badane ze względu na swoje zastosowania w różnych dziedzinach matematyki i informatyki.

Dla grafu  $\Gamma = (V, E)$  stopień wierzchołka to ilość krawędzi posiadających jeden koniec w tym wierzchołku. Dla podzbioru  $A \subseteq V$  definiujemy brzeg “krawędziowy” jako zbiór tych krawędzi  $e \in E$ , dla których jeden koniec leży w  $A$  a drugi w  $V \setminus A$ . Wówczas  $\partial_e A = \partial_e V \setminus A$ .

**Definicja 59.** *Niech  $\Gamma = (V, E)$  skończony graf. Stałą izoperymetryczną Cheegera  $h(\Gamma)$  definiujemy wzorem*

$$h(\Gamma) = \min \left\{ \frac{\#\partial_e A}{\max(A, V \setminus A)} : A \subseteq V \right\}.$$

Stała ta mierzy rozmiary brzegu zbiorów wierzchołków. Definicja ekspanderów wykorzystuje tę stałą.

**Definicja 60.** Niech  $\{\Gamma_n = (V_n, E_n)\}$  będzie ciągiem skończonych grafów o wspólnie ograniczonych stopniach wierzchołków.  $\{\Gamma_n\}$  jest ciągiem ekspanderów jeśli

1.  $\#V_n \rightarrow \infty$ ,
2.  $\inf h(\Gamma_n) > 0$ .

Zatem ekspandery to grafy o wspólnie ograniczonych stopniach wierzchołków, w których zbiory mają relatywnie duże brzegi. Innymi słowy, taki graf ma dużo dróg pomiędzy wierzchołkami. Tego typu grafy mają zastosowania w informatyce i w przemyśle.

Teraz mając dany graf  $\Gamma$  jak powyżej wybierzmy dowolną orientację krawędzi. Definiujemy dyskretny gradient  $\nabla : \ell_2(V) \rightarrow \ell_2(E)$  wzorem

$$\nabla f(x, y) = f(y) - f(x),$$

jeśli  $(x, y)$  jest zorientowaną krawędzią o początku  $x$  i końcu  $y$ . Dyskretny Laplasjan  $\Delta : \ell_2(V) \rightarrow \ell_2(V)$  jest wówczas zdefiniowany wzorem

$$\Delta = \nabla^* \nabla.$$

Operator  $\Delta$  jest dodatnim, samosprzeżonym operatorem na przestrzeni skończonej wymiarowej  $\ell_2(V)$ . 0 jest w jego spektrum przy założeniu że graf  $\Gamma$  jest spójny. Przez  $\lambda_1(\Gamma)$  oznaczamy najmniejszą dodatnią wartość własną  $\Delta$ .

**Twierdzenie 61** (Dodziuk, Alon, Tanner, ...). Niech  $\Gamma$  graf skończony o stopniach wierzchołków ograniczonych przez  $k$ . Wówczas

$$\frac{h(\Gamma)^2}{2k} \leq \lambda_1(\Gamma) \leq 2h(\Gamma).$$

Stąd otrzymujemy analityczną charakteryzację ekspanderów.

**Wniosek 62.**  $\{\Gamma_n\}$  jest ciągiem ekspanderów wtedy i tylko wtedy gdy  $\#V_n \rightarrow \infty$  oraz

$$\inf \lambda_1(\Gamma_n) > 0.$$

Przykłady ekspanderów nie są łatwe do skonstruowania. Konstrukcję Margulisa omówimy w następnej sekcji.

**Twierdzenie 63.** Niech  $\{\Gamma_n\}$  będzie ciągiem ekspanderów. Wówczas  $X = \coprod \Gamma_n$  nie zanurza się zgrubnie w przestrzeń Hilberta.

Wykorzystując pewne techniki interpolacyjne można również pokazać, że ekspandery nie zanurzają się zgrubnie w przestrzenie  $L_p$  dla  $1 \leq p < \infty$ .

Ważnym problemem w geometrii metrycznej jest pytanie o zanurzalność ekspanderów w jednostajnie wypukłe przestrzenie Banacha.

**Twierdzenie 64** (V. Lafforgue 2007; Mendel-Naor 2011). Istnieją ekspandery, które nie zanurzają się zgrubnie w żadną jednostajnie wypukłą przestrzeń Banacha.

Nadal nie wiadomo czy istnieją ekspandery, które zanurzają się zgrubnie w pewną jednostajnie wypukłą przestrzeń Banacha.

## 9 Własność (T)

Własność (T) została wprowadzona przez Kazhdana w latach 60tych. Operator ograniczony  $U$  na przestrzeni Hilberta jest unitarny jeśli  $U^*U = I$ . Operatory unitarne są izometriami liniowymi przestrzeni Hilberta: zachowują iloczyn skalarny.

**Definicja 65.** Grupa  $G$  generowana przez skończony zbiór  $S$  ma własność (T) jeśli dla każdej reprezentacji unitarnej, która nie ma wektorów niezmienniczych istnieje  $\delta > 0$  taka, że

$$\sup_{s \in S} \|v - \pi_s v\| \geq \delta \|v\|.$$

**Przykład 66.** Grupy skończone mają (T).

Własność (T) jest bardzo silną własnością grupy i relatywnie niewiele grup ją posiada. Głównymi przykładami są kraty w grupach Liego wyższej rangi, a w szczególności grupy  $SL_n(\mathbb{Z})$  dla  $n \geq 3$  (Kazhdan).

Własność (T) ma wiele zastosowań, w szczególności ekspandery. Niezależnie Margulis i Sullivan rozwiązali przy jej pomocy problem Ruziewicza o jednoznaczności średniej niezmienniczej na sferze w  $\mathbb{R}^n$ , niezmienniczej ze względu na obroty.

**Przykład 67.** Grupa  $\mathbb{Z}$ , a ogólniej, grupy średniowalne, nie mają własności (T). Istotnie, reprezentacja regularna  $\lambda$  grupy  $G$  na  $\ell_2(G)$  ma ciąg wektorów  $v_n = \frac{1_{F_n}}{(\#F_n)^{1/2}}$ , gdzie  $F_n$  jest zbiorem Følnera dla  $\varepsilon = 1/n$ , spełniających

$$\|v_n - \lambda_s v_n\| \rightarrow 0,$$

dla  $s \in S$ . Z drugiej strony,  $\lambda$  nie posiada niezerowych wektorów niezmienniczych. (Reprezentacja regularna  $G$  na  $\ell_2(G)$  jest dana przez lewe przesunięcia:  $(\lambda_h f)(g) = f(h^{-1}g)$ ).

**Lemat 68.** Niech  $H$  będzie podgrupą skończonego indeksu w  $G$ . Wówczas  $G$  ma własność (T) wtedy i tylko wtedy gdy  $H$  ma własność (T).

**Stwierdzenie 69.** Niech  $G$  grupa z własnością (T) a  $Q$  niech będzie ilorazem  $G$ . Wówczas  $Q$  ma własność (T).

*Dowód.* Niech  $\pi$  reprezentacja unitarna  $Q$  na przestrzeni Hilberta  $H$ , nie posiadająca niezerowych wektorów niezmienniczych. W naturalny sposób  $\pi$  zadaje też reprezentację unitarną grupy  $G$ , również nie posiadającą wektorów niezmienniczych. Zatem istnieje  $\delta > 0$  taka, że

$$\sup_{s \in S} \|v - \pi_s v\| \geq \delta \|v\|,$$

dla każdego generatora  $s$  grupy  $G$ . Zatem to samo możemy wywnioskować dla generatorów grupy  $Q$ , będących obrazem generatorów  $G$  przy przekształceniu ilorazowym.  $\square$

**Wniosek 70.** Grupa, która rzutuje się na nieskończoną grupę średniowalną, nie może mieć własności (T). W szczególności, grupa wolna  $\mathbb{F}_n$  nie ma własności (T).

Wykorzystując powyższy fakt, Margulis udowodnił następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 71** (Margulis). *Niech  $G$  - rezydualnie skończona grupa z własnością (T) Kazhdana. Wówczas rodzina grafów Cayley skończonych ilorazów  $G_i$ , gdzie  $N_i$  ciąg podgrup skończonego indeksu w  $G$  o trywialnym przecięciu, stanowi rodzinę ekspanderów.*

W szczególności, korzystając z własności (T) dla  $SL_3(\mathbb{Z})$ , rodzina grafów Cayley'a

$$SL_3(\mathbb{Z}_{p^k}),$$

stanowi rodzinę ekspanderów.

## Literatura

- [1] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. MR2415834 (2009i:22001)
- [2] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR1744486 (2000k:53038)
- [3] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295. MR1253544 (95m:20041)
- [4] Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000. MR1786869 (2001i:20081)
- [5] Shlomo Hoory, Nathan Linial, and Avi Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **43** (2006), no. 4, 439–561 (electronic), DOI 10.1090/S0273-0979-06-01126-8. MR2247919 (2007h:68055)
- [6] Alexander Lubotzky, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Progress in Mathematics, vol. 125, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. With an appendix by Jonathan D. Rogawski. MR1308046 (96g:22018)
- [7] Piotr W. Nowak and Guoliang Yu, *Large scale geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012. MR2986138
- [8] John Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR2007488 (2004g:53050)